La piste infernale : corrigé

La longueur de la piste le premier soir est l_1 = 10 m

La longueur de la piste le deuxième soir est l_2 = 20 m

Soit l_n la longueur de la piste le $n^{ième}$soir.

La suite (l_n) est une suite arithmétique de raison 10.

On a donc l_n = l_1 + (n-1)10

Donc l_n = 10 + 10n -10

Donc l_n = 10n

Soit d_n la distance (en mètres) de la tortue au début de la piste le $n^{ième}$ soir et soit r_n la distance qu'il lui reste à parcourir.

On a : d_1 = 1 ; r_1 = 10 - d_1 donc r_1 = 9

Pendant la nuit du premier au deuxième jour la piste s'allonge de 10m, régulièrement répartis sur toute sa longueur initiale. Au matin du deuxième jour la longueur de la piste est de 20m, donc a doublé. La distance de la tortue au point de départ s'est allongée dans les mêmes proportions, donc a doublé aussi et est donc de 2m au réveil de la tortue.

On a : d_2 = 2 + 1 = 3 ; $r_2 = l_2$ - d_2 donc r_2 = 20 – 3 = 17

La longueur de la piste qui est de 20m le deuxième jour est devenue 30m le troisième jour. Entre le deuxième et le troisième jour elle a été multipliée par $\frac{30}{20}$ c'est-à-dire par $\frac{3}{2}$. La tortue se réveille donc au matin du troisième jour à la distance $d_2 \times \frac{3}{2}$

On a donc : $d_3 = d_2 \times \frac{3}{2} + 1 = 3 \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2}$

On a l_{n-1} = 10(n-1) et l_n = 10n

Entre le $(n-1)^{ième}$ et le $n^{ième}$ jour , la longueur de la piste a été multipliée par $\frac{n}{n-1}$.

Au matin du $n^{ième}$ jour la tortue se réveille donc à la distance $d_{n-1} \times \frac{n}{n-1}$ du début de la piste.

Le soir elle est à la distance $d_n = d_{n-1} \times \frac{n}{n-1} + 1$ et il lui reste à parcourir $r_n = l_n - d_n$, c'est-à-dire : r_n = 10n - d_n.

Il faut donc programmer sur un ordinateur les suites $(d)_n$ et $(r)_n$ et déterminer pour quel rang n le terme r_n devient négatif (ou nul) alors que r_{n-1} est positif.

La suite $(d)_n$ est définie par :

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_n = d_{n-1} \times \left(\dfrac{n}{n-1}\right) + 1 \end{cases}$$

La suite $(r)_n$ est définie par :

r_n = 10n - d_n